

UOT: 517.52

<https://doi.org/10.30546/670832.2025.02.1250>

Naхçıvan Müəllimlər İnstitutu. Elmi əsərlər, 2025, № 4, s.124-128

Nakhchivan Teachers Institute. Scientific Works, 2025, № 4, p.124-128

Нахчыванский институт учителей. Научные труды, 2025, № 4, с.124-128

Qoşma sərhəd məsələlərinin maksimum prinsipinin tətbiqi və ardıcıl yaxınlaşma üsulu ilə həlli

Müəllif(lər):

Dilarə Rəsulova

Naхçıvan Dövlət Universiteti

Magistrant

E-poçt: dresulova30@gmail.com

Açar sözlər: maksimum prinsip, Lipsitz şərti, sərhəd məsələsi

Annotasiya. Bəzi optimal idarəetmə məsələlərinin maksimum prinsipi vasitəsilə həll etmək üçün onu xüsusi sərhəd məsələlərinə gətirirlər. Belə xüsusi sərhəd məsələsi maksimum şərtindən, adi diferensial tənliklər sistemindən, sərhəd və normallaşma şərtlərindən ibarət olur.

Məqalədə, belə məsələlərdən biri olan, optimal idarəetmə məsələsinin maksimum prinsipinin qoşma sərhəd məsələsinə və bu məsələnin həllinə ardıcıl yaxınlaşma üsulu ilə baxılmışdır. Əvvəlcə $J(u)$ operatorunun müəyyən sərhəd şərtlərini ödəyən həllinin tapılması tələbi qoyulur. Buna görə operatora daxil olan $F(x(T))$ funksiyası üçün xüsusi şərtləri ödədiyi qəbul edilərək, verilən optimal idarəetmə məsələsinin maksimum prinsipi üçün qoşma sərhəd məsələsi verilir. Bu traektoriyanın bir ucu bağlı olduqda sistemin həlli olan $\varphi(x)$ funksiyası üçün qoşma sərhəd şərtləri (bu transversallıq şərtləri adlandırılır) verilmək izah olunur. Beləliklə ardıcıl yaxınlaşma üsulunun tam şəkildə təhlili verilərək, qoşma sərhəd məsələsinin maksimum prinsipinin tətbiqi ilə ardıcıl yaxınlaşma üsulu ilə həll etmək üçün alqoritm göstərilmiş, axırda qoyulan məsələnin həllinin varlığı, xüsusi teoremlə isbat edilmişdir.

Author(s):

Dilara Rasulova

Nakhchivan State University

Master student

E-mail: dresulova30@gmail.com

Key words: maximum principle, term of Lipschitz, boundary problem

Application of the maximum principle to adjoint boundary value problems and their solution via the method of successive approximations

Abstract. To solve certain optimal control problems by means of the maximum principle, they are reduced to special boundary value problems. Such a boundary value problem consists of the maximum condition, a system of ordinary differential equations, and boundary and normalization conditions.

In this paper, one of these problems - an optimal control problem - is considered through the formulation of its adjoint boundary value problem derived from the maximum principle, and its solution is studied using the method of successive approximations. First, the requirement to find a solution of the operator $J(u)$ satisfying given boundary conditions is introduced. For this purpose, assuming that the function $F(x(T))$, which appears in the operator, satisfies certain specific conditions, the adjoint boundary value problem corresponding to the maximum principle of the given optimal control problem is presented. It is explained that when one end of the trajectory is fixed, the adjoint boundary conditions (referred to as transversality conditions) for the function $\varphi(x)$, which represents the solution of the system, are formulated. Thus, a complete analysis of the method of successive approximations is provided, an algorithm for solving the adjoint boundary value problem using the maximum principle is proposed, and finally, the existence of a solution to the problem is established via a special theorem.

Автор(ы):

Дилара Расулова

Нахчыванский государственный

университет

Магистрант

Э-почта: dresulova30@gmail.com

Ключевые слова: принцип максимума, условие Липшица, краевая задача

Применение принципа максимума к сопряженным краевым задачам и их решение методом последовательных приближений

Аннотация. Для решения некоторых задач оптимального управления с помощью принципа максимума их сводят к специальным краевым задачам. Такие задачи включают условие максимума, систему обыкновенных дифференциальных уравнений, а также краевые и условия нормировки.

В статье рассмотрена одна из таких задач — применение принципа максимума в задаче оптимального управления, сводимой к сопряженной краевой задаче, и ее решение методом последовательных приближений. Сначала формулируется требование нахождения решения оператора $J(u)$, удовлетворяющего определенным граничным условиям. Исходя из этого, для функции $F(x(T))$, входящей в оператор, принимается выполнение специальных условий, после чего формулируется сопряженная краевая задача принципа максимума.

В случае, когда один конец траектории фиксирован, задаются сопряженные граничные условия (так называемые условия трансверсальности) для функции $\varphi(x)$, являющейся решением системы. В результате представлен полный анализ метода последовательных приближений, разработан алгоритм решения сопряженной краевой задачи с применением принципа максимума, а существование решения доказано с помощью специальной теоремы.

Giriş. Tutaq ki, hər hansı fəza obyektinin hərəkəti adi diferensial tənlikləri sistemi ilə təsvir olunur. Bu sistemi vektor şəklində aşağıdakı şəkildə yazmaq olar:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = f(t, x(t), u(t)), t \in [t_0, T] \quad (1)$$

$x(t)$ obyektin fəza vəziyyətini, $u(t)$ idarəetməni təyin edir. Bu tənliyin həllini birqiymətli təyin etmək üçün $x(t_0) = x_0$ Koşi şərti də daxil edilir. Bu idarəetmə məsələsini həll etmək üçün maksimum prinsipinin köməyiylə qoşma sərhəd məsələsinə gətirəcəyik və ardıcıl yaxınlaşma üsulundan istifadə edəcəyik.

Fərz edək ki, optimal idarəetmə məsələsi aşağıdakı kimi qoyulmuşdur:

$$J(u) = \int_{t_0}^T f^0(t, x(t), u(t))dt + F(x(T)) \quad (2)$$

operatorunun

$$U = \{u = u(t); u(t) \in D \subset R^m, t_0 \leq t \leq T, u(t) \in C(D)\}$$

çoxluğunda

$$\frac{\partial x}{\partial t} = f(t, x, u), t_0 \leq t \leq T, x(t_0) = x_0 \quad (3)$$

şərtlərini ödəyən minimumunu tapmaq tələb olunur. Hesab edək ki, $f(t, x, u)$, $F(x)$ funksiyaları x, u dəyişənlərinə nəzərən Lipşist şərtini ödəyirlər. Onda bu optimal idarəetmə məsələsinin maksimum prinsipinin qoşma sərhəd məsələsini aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = f(t, x, u), t_0 \leq t \leq T, x(t_0) = x_0 \quad (4)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -f_x^0(t, x, u) + \sum_{j=1}^n \psi_j f_x^j(t, x, u), \\ \psi(T) = -F_x(x(T)) \end{cases} \quad (5)$$

Burada $u = u(t, x, \psi)$ idarəetmə funksiyası

$$\sup_{u \in D} H(t, x, u, \psi) = H(t, x, u(t, x, \psi), \psi) \quad (6)$$

şərtinə görə tapılır.

İndi ardıcıl yaxınlaşma üsulunun burada tətbiqi metodunu göstərək:

Tutaq ki, $u_0 = u_0(t), t_0 \leq t \leq T_0$ başlanğıc yaxınlaşmadır, k -cı yaxınlaşmada $u_k \in U$ mümkün idarəetməsi tapılmışdır. (4) və (5) Koşi şərtlərindən istifadə etməklə $u_k = u_k(t)$ -yə uyğun $x_k(t)$ və $\varphi_k(t)$, $t \in [t_0, T]$ funksiyalarını təyin etmək olar. Bunun üçün (4)-də u ifadəsini $u_k(t)$ ilə əvəz edirik:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = f(t, x, u_k(t)), t_0 \leq t \leq T, x(t_0) = x_0$$

və bu məsələni həll edib, tapılmış $x_k = x_k(t)$ və $u_k(t)$ funksiyalarını (5)-də yerinə yazıb

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -f_x^0(t, x_k(t), u_k(t)) + \sum_{j=1}^n \psi_j f_x^j(t, x_k(t), u_k(t)), \\ t_0 \leq t \leq T, \psi(T) = -F_x(x_k(t)) \end{cases} \quad (7)$$

sistemindən $\psi_k = \psi_k(t)$ funksiyalarını təyin edirik. Buradan alınan $x_k = x_k(t)$, $\psi_k = \psi_k(t)$ funksiyalarını (6) ifadəsində yerinə yazılıb,

$$\sup_{u \in D} H(t, x_k, u, \psi_k(t)) = H(t, x_k(t), \overline{u}_k(t), \psi_k(t)) \quad (8)$$

şərtindən köməkçi $\overline{u}_k(t)$ idarəetmə funksiyasını təyin edirik. Bu funksiyanın hissə-hissə kəsilməz olduğunu qəbul edirik. Belə olan halda bu idarəetmə U çoxluğunda

$$J_k(u) = \int_{t_0}^T H(t, x_k(t), u(t), \varphi_k(t)) - H(t, x_k(t), \overline{u}_k(t), \psi_k(t)) dt \quad (9)$$

funksionalına minimum verir. Bu isə o deməkdir ki, (2) funksionalının

$$\Delta J = - \int_{t_0}^T [H(t, x(t), u(t) + h(t), \psi(t)) - H(t, x(t), u(t), \psi(t))] dt + R \quad (10)$$

artım düsturunda R qalığı həddini kifayət qədər kiçiltmək mümkün olarsa, onda $\overline{u}_k(t)$ idarəetmə funksiyası (2) operatorunun qiymətinin k -cı addımda ən çox kiçilməsinə səbəb olacaqdır. Aşağıdakı kimi funksiya quraq:

$$\omega_k(t) = H(t, x_k(t), \overline{u}_k(t), \varphi_k(t)) - H(t, x_k(t), u_k(t), \varphi_k(t)) \quad (11)$$

İndi bu $\omega_k(t)$ idarəetməsini $T_k(\varepsilon)$, $(\varepsilon \in (0, T - t_0))$ çoxluğunun $\overline{u}_k(t)$ köməkçi idarəetməsi vasitəsilə variasiya edərək aşağıdakı kimi idarəetmələr ailəsini alırıq:

$$u_k(t) = \begin{cases} \overline{u}_k(t) & t \in T_k(\varepsilon) \\ u_k(t) & t \in [t_0, T] \setminus T_k(\varepsilon) \end{cases} \quad (12)$$

Bu düsturda ε parametri iynəvari variasiyanın addımı rolunu oynayır. Həmçinin (2) operatorunun qiymətinin kiçilməsi şərtindən alınır. Başqa sözlə, elə $\varepsilon_k \in (0, T - t_0)$ ədədi tapılır ki,

$$J(u_k(t, \varepsilon_k)) < J(u_k) \quad (13)$$

şərti ödənilir.

Beləliklə, (13) ödənildikdə növbəti yaxınlaşma olaraq $u_k(t, \varepsilon_k)$ idarəetməsinə baxılır:

$$u_{k+1}(t) = u_k(t, \varepsilon_k), \quad t \in [t_0, T] \quad (14)$$

Proses bu qayda ilə davam elətdirilir. (8), (12), (13), (14) münasibətləri (2), (3) optimal idarəetmə məsələsini həll etmək üçün maksimum prinsipinə əsaslanan alqoritm verir.

Teorem: Tutaq ki, $D \in R^m$ – qapalı məhdud çoxluq, $f^j(t, x, u)$, $(j = \overline{0, n})$, $F(x)$ funksiyaları və onların x dəyişəninə görə törəmələri bütün arqumentlərə nəzərən kəsilməzdir. Həmçinin $f^j(t, x, u)$, $(j = \overline{0, n})$, $f_x^j(t, x, u)$, $(j = \overline{0, n})$, $F_x(x)$ funksiyaları (x, u) – ya nəzərən Lipşist şərtini ödəyirlər. Onda (8)-(14) sxemi ilə tapılan $\{u_k\}$ ardıcılığı üçün

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(u_k) = 0$$

Olur. (Burada $\mu(u_k) = \frac{1}{T-t_0} \int_{t_0}^T \omega_k(t) dt$ kimi göstərilir.)

İsbatı: $J(u)$ funksionalının $u_k(t)$ və $u_k(t, \varepsilon)$ idarəetmələri vasitəsilə hesablanan artımına baxaq:

(9) düsturuna görə

$$\Delta J_k(u) = J(u_k(t, k)) - J(u_k) = - \int_{T_k(\varepsilon)} \omega_k(t) dt + R_k \quad (15)$$

yaza bilərik. Burada $|R_k| \leq C_0 (\text{mes } T_k(\cdot))^2 = C_0^2$, C_0 sabiti R və ε -dan asılı deyil. Bu qiymətləndirməni nəzərə alsaq

$$J(u_k(t, \varepsilon)) - J(u_k) \leq -\mu(u_k)\varepsilon + C_0\varepsilon^2, \quad \varepsilon \in [0, T - t_0] \quad (16)$$

Buradan görünür ki, kifayət qədər kiçik ε üçün $u_k(t, \varepsilon)$ idarəetməsi (2) funksionalının qiymətini kiçildir. Deməli ε_k elə seçərik ki, (13) şərti ödənilər. Burada da (14)-dən istifadə etməklə alırıq ki,

$$J(u_{k+1}) < J(u_k) \quad (17)$$

Deməli $\{u_k\}$ ardıcılığı üzrə $J(u)$ funksionalı monoton azalır. Digər tərəfdən teoremdəki şərtlər daxilində $\{J(u_k)\}$ ardıcılığı aşağıdan məhduddur. $J(u)$ funksionalının formasından, $f^j(t, x, u)$, $(j = \overline{0, n})$, $F(x)$ funksiyaalarının və D çoxluğunun ödədiyi şərtləri nəzərə almaqla, asanlıqla göstərmək olar ki,

$$J(u_k) \leq C_1$$

Burada $C_1 > 0$ sabiti k -dan asılı deyil. Onda (17)-yə əsasən yaza bilərik:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) - J(u_{k+1}) = 0 \quad (18)$$

(16) bərabərsizliyini aşağıdakı kimi yazaq:

$$J(u_{k+1}) - J(u_k) \leq -\mu(u_k)\varepsilon + C_0\varepsilon^2, \quad \varepsilon \in [0, T - t_0]$$

Buradan da

$$0 \leq \mu(u_k) \leq \frac{J(u_k) - J(u_{k+1})}{\varepsilon} + C_0\varepsilon$$

bərabərsizliyini alırıq. Bu bərabərsizliklə ε -nu qeyd edib, $k \rightarrow \infty$ şərti ilə limitə keçsək, onda (18) limitindən istifadə etməklə

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(u_k) \leq \overline{\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(u_k)} \leq C_0\varepsilon$$

bərabərsizliklərini alırıq ki, buradan da $\varepsilon \rightarrow +0$ olduqda $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(u_k) = 0$ olur. Bununla da teorem isbat edildi.

Material və metodlar. Tədqiqatın materialı və metodu fəza obyektlərinin hərəkətini təsvir edən idarəetmə məsələlərinin riyazi analizini əhatə edir. Tədqiqatın əsas məqsədi verilmiş idarəetmə

çoxluğunda funksionalın minimumunu tapmaq və optimal idarəetmə strategiyasını müəyyən etməkdir. Analiz edilən sistemdə obyektin vəziyyəti və idarəetmə funksiyası nəzərə alınaraq, hər bir addımda sistemin vəziyyət funksiyası və qoşma dəyişənləri hesablanmışdır.

Metod olaraq Maksimum Prinsipi əsasında qoşma sərhəd məsələsi qurulmuş və ardıcıl yaxınlaşma üsulu tətbiq edilmişdir. Başlanğıc idarəetmə təxminindən başlanaraq hər iterasiya mərhələsində mövcud idarəetmə funksiyasına uyğun sistemin vəziyyət və köməkçi funksiyaları hesablanmışdır. Bu mərhələdə idarəetmə funksiyası müxtəlif variasiyalarla optimallaşdırılmış, funksionalın qiymətinin azaldılması təmin edilmişdir. İterativ proses davam etdirilərək limitdə optimal idarəetməyə yaxınlaşma əldə edilmişdir.

Tədqiqatda, həmçinin idarəetmə funksiyasının hissə-hissə kəsilməzliyi, eskiz və mərhələli hesablamaların tətbiqi, funksionalın monoton azalması prinsipləri nəzərə alınmışdır. Bu metodika optimal idarəetmə məsələlərinin həm nəzəri isbatını, həm də praktik tətbiqini təmin edir, sistemin davranışını optimal şəkildə qiymətləndirməyə imkan yaradır.

Yekun nəticə. Tədqiqat göstərir ki, ardıcıl yaxınlaşma üsulu Maksimum Prinsipi ilə birləşdirildikdə fəza obyektlərinin hərəkətini təsvir edən optimal idarəetmə məsələlərinin effektiv həlli mümkündür. Aparılan analiz və iterativ hesablamalar göstərir ki, bu metodika funksionalın minimuma yaxınlaşmasını təmin edir və idarəetmə strategiyasının optimal formalaşmasına imkan yaradır. Teoremin və tətbiqi nümunələrin nəticələri göstərir ki, idarəetmə funksiyasının mərhələli və sistemli təhlili, köməkçi dəyişənlərin hesablanması və funksionalın artımının monitorinqi, sistemi idarəetmədə stabil və optimal nəticə əldə etməyə imkan verir. Beləliklə, tədqiqat həm nəzəri əsasları, həm də praktik tətbiqi baxımdan idarəetmə məsələlərinin həllində metodik alqoritmin etibarlılığını təsdiq edir və gələcək araşdırmalar üçün nəzəri baza yaradır.

Ədəbiyyat

1. Габасова, Р. Принцип максимума в теории оптимального управления / Р.Габасова и Ф.М.Кирилловой. – Минск, – 1974
2. Ногип, В.Д. Основы теории оптимизации / В.Д.Ногип, У.У.Евлаимев. – Москва, – 1986
3. Поляк, В.Т. Введение в оптимизацию / В.Т.Поляк, – М.: Наука – 1983
4. Понтрягин, Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.С.Понтрягин, – М.:Наука, – 1965
5. İsgəndərov, A.D. Optimallaşma üsulları / A.D.İsgəndərov, R.Q.Tağıyev, Q.Y.Yaqubov. – Bakı, – 1994
6. Əhmədov, Q. Adi diferensial tənliklər / Q.Əhmədov, K.Həsənov, M. Yaqubov. – Bakı: Maarif, – 1978
7. İbrahimov, N.S. Adi diferensial tənliklər / N.S.İbrahimov. – Lənkəran, – 2019
8. Quliyev, X.M. Diferensial tənliklər / X.M.Quliyev, K.Q.Həsənov. – Bakı – 2001
9. Russel A.Cordon. Differential equations / A.Cordon Russel. – Boston: Addison Wesley, – 2004

*Məqalə riyaziyyat üzrə elmlər doktoru, professor Bilal Bilalov
tərəfindən təqdim olunmuşdur.*

İlkin daxilolma – 24.09.2025, son daxilolma – 24.10.2025, qəbul olunma – 05.12.2025